

2024年度 都立西高校【数学】大問4

高校生のNさんは、夏休みに母校の中学校で数学の学習補助のボランティア活動に参加した。Nさんは、そこで中学生の太郎さんがノートに次のような計算をしているのを見つけた。Nさんは間違っているところに×を書いた。

太郎さんのノート	
ア $\sqrt{9 + \frac{2}{5}} = \sqrt{3^2 + \frac{2}{5}}$	1行目
$= 3\sqrt{\frac{2}{5}}$	× 2行目
イ $\sqrt{4 + \frac{4}{3}} = \sqrt{2^2 + \frac{4}{3}}$	3行目
$= 2\sqrt{\frac{4}{3}}$	4行目

太郎さんは、 $\sqrt{a^2 + b}$ が $a\sqrt{b}$ になると勘違いしており、そのためアの計算には間違ったところがある。Nさんは、太郎さんが同様の勘違いでイの計算を行ったと考え、太郎さんのノートの4行目のところで×を付けようと思ったが、正しく計算した答えと同じになるため×を付けることができなかった。Nさんは、aが正の整数、bが正の数するとき、太郎さんのノートの3行目から4行目の計算のように $\sqrt{a^2 + b} = a\sqrt{b}$ となる例が他にもないか調べてみたところ、Nさんは、a = 10 のとき、b = (あ) となるのを見つけた。

〔問1〕

(あ) に当てはまる値を求めよ。



次に、Nさんは中学生の花子さんがノートに次のような式の展開をしているのを見つけた。Nさんは、間違っているところに×を書いた。

花子さんのノート

ウ	$(x+5)^2 - (x+4)(x+2) = (x^2+5^2) - (x^2+4 \times 2)$	× 1行目
	$= 25 - 8$	2行目
	$= 17$	3行目
エ	$(x+7)^2 - (x+10)(x+4) = (x^2+7^2) - (x^2+10 \times 4)$	4行目
	$= 49 - 40$	5行目
	$= 9$	6行目

花子さんは、 x 、 y がどんな値でも、 $(x+y)^2$ が x^2+y^2 に、 $(x+c)(x+d)$ が x^2+cd になると勘違いしており、そのためウの式の展開には間違ったところがある。Nさんは、花子さんが同様の勘違いでエの式の展開を行ったと考え、花子さんのノートの4行目のところで×を付けようと思ったが、×を付けることができなかった。Nさんは、花子さんの勘違いによる式の展開と、正しく式の展開をしたときの結果が同じになるときは、どんな場合か興味をもった。

e、f、gを自然数として $f > g$ 、 $x \neq 0$ とすると、Nさんは、 $(x+e)^2 - (x+f)(x+g)$ を花子さんの勘違いによる方法で展開したときと、正しく展開したときの結果が同じになるときは、 $(x+e)^2 - (x+f)(x+g) = A$ としたとき、 \sqrt{A} が必ず自然数になることに気が付いた。

〔問2〕

上記の下線部が正しい理由を、文字 x 、 e 、 f 、 g 、 A を用いて説明せよ。ただし、説明の過程が分かるように、途中の式や考え方なども書け。なお、2つの数 X 、 Y について、【表】で示される関係が成り立ち、オ～ケには偶数か奇数のどちらかが入る。説明するときに【表】のオ～ケに偶数か奇数を正しく当てはめた結果については、証明せずに用いてよい。

【表】

	X, Yともに偶数	X, Yともに奇数	X, Yどちらかが偶数でもう一方が奇数
$X+Y$	偶数	オ	カ
$X-Y$	キ	ク	ケ



Nさんは、誤った計算方法でも正しい答えが出てくる場合について、他にどのような例があるか調べたところ、 h を1以上9以下の整数、 i 、 j をそれぞれ0以上9以下の整数としたとき、 $(h + i + j)^3 = 100h + 10i + j$ となる場合があることが分かった。

そこでNさんは、 k を1以上9以下の整数、 l 、 m 、 n をそれぞれ0以上9以下の整数として、 $(k + l + m + n)^4$ の値が k 、 l 、 m 、 n を左から順に並べた4桁の数と等しくなる場合があるか考え、そのような k 、 l 、 m 、 n の組を見付けることができた。

〔問3〕

Nさんが見つけた k 、 l 、 m 、 n について、 $\sqrt{1000k + 100l + 10m + n}$ の値を求めよ。

