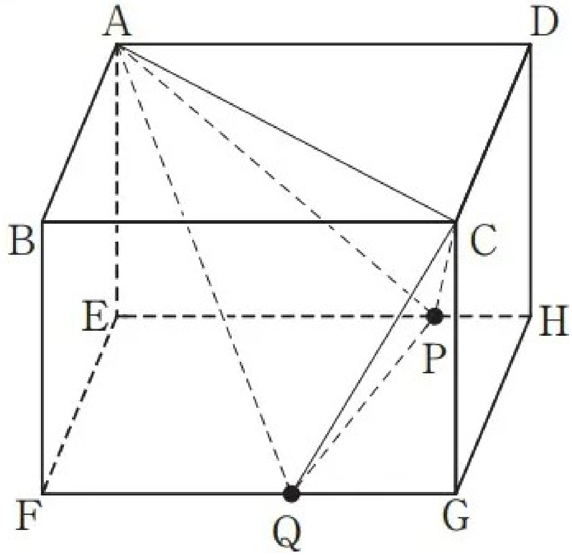
2025年度　都立青山高校【数学】大問４

下の図１に示した立体ＡＢＣＤ―ＥＦＧＨは、ＡＢ＝４ｃｍ、ＡＤ＝８ｃｍ、ＡＥ＝６ｃｍの直方体である。点Ｐは辺ＥＨ上にある点、点Ｑは辺ＦＧ上にある点である。頂点Ａと頂点Ｃ、頂点Ａと点Ｐ、頂点Ａと点Ｑ、頂点Ｃと点Ｐ、頂点Ｃと点Ｑ、点Ｐと点Ｑをそれぞれ結ぶ。次の各問に答えよ。

図１



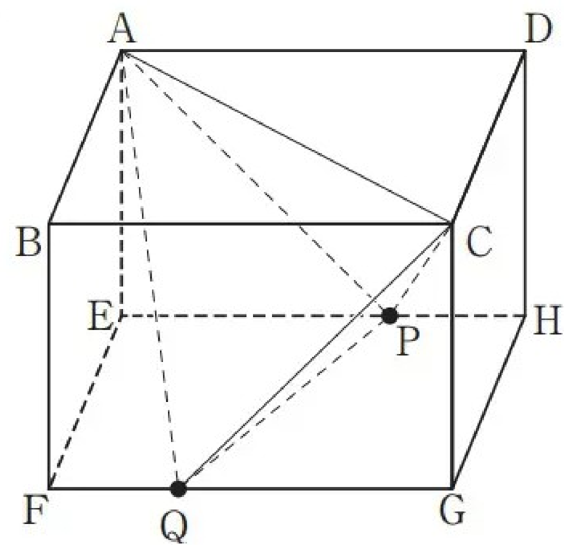
〔問１〕
点Ｐが頂点Ｈに一致し、点Ｑが頂点Ｆに一致するとき、
立体Ａ―ＣＰＱの体積は何ｃｍ^{3}か。

〔問２〕
次の図２は、図１において、ＦＱ＝ＨＰ＝３ｃｍの場合を表している。

『図２において、立体Ａ―ＣＰＱの体積は何ｃｍ^{3}か。』

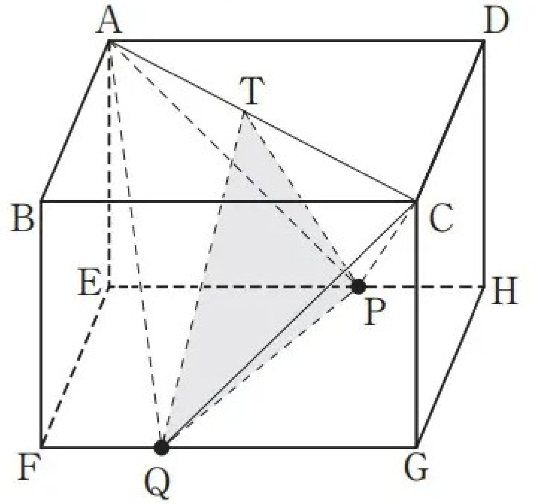
という問題について、ヤマさんとアオさんが次のような会話をしている。
会話文を読んで、【ヤマさんが書いた解答】の①と②に当てはまる数を答えよ。
また、③には答えを求める過程が分かるように、途中の式や計算などを書き、解答を完成させせよ。

図２

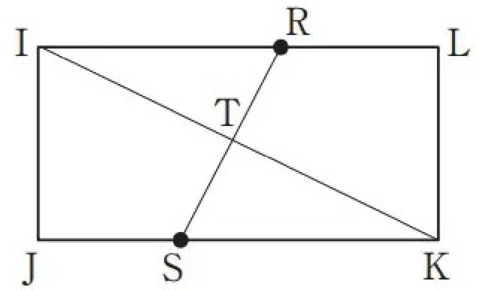


ヤマさん：面ＥＦＧＨに垂直で線分ＰＱを通る平面を考えてみよう。
この平面と線分ＡＣとの交点をＴとして図をかいてみたよ。
アオさん：【ヤマさんがかいた図】を、面ＡＢＣＤから見た図にしてかいてみたよ。
頂点Ａと頂点Ｅ、頂点Ｂと頂点Ｆ、頂点Ｃと頂点Ｇ、頂点Ｄと頂点Ｈは
それぞれ重なっているから、それぞれＩ、Ｊ、Ｋ、Ｌと表したよ。
それから、点Ｐと点Ｑはそれぞれ点Ｒ、点Ｓで表したよ。
線分ＩＫと線分ＲＳが垂直に交わっていることは、次のように証明できるね。

【ヤマさんがかいた図】



【アオさんがかいた図】



【アオさんが書いた証明】
点Ｒから線分 JK に垂線を引き，交点を U とする。
△RSU と△IKL は，３組の辺の比が全て等しいから，△RSU ∽△IKL
よって，∠ RSU ＝∠ IKL…（ア）
また，平行線の錯角は等しいから，∠ RSU ＝∠ IRT…（イ）
次に，△IKL と△IRT において，∠ I は共通な角だから，∠ KIL ＝∠ RIT
（ア），（イ）より，∠ IKL ＝∠ IRT
よって，２組の角がそれぞれ等しいから，△IKL ∽△IRT
以上より，∠ ITR ＝∠ ILK＝ 90゜だから，線分 IK と線分 RS は垂直に交わる。

ヤマさん：このことを利用すれば、立体Ａ―ＣＰＱの体積を求めることができそうだよ。
立体Ａ―ＰＱＴと立体Ｃ―ＰＱＴの体積を考えればいいね。解答を書いてみたよ。

【ヤマさんが書いた解答】

PQ＝ ① cm であり，辺 PQ を底辺とすれば，△PQT の高さは ② cm である。
したがって，立体 A-CPQ の体積は，

③

アオさん：今回は線分ＩＫと線分ＲＳが垂直に交わっているから、
この方法で求めることができたね。

ヤマさん：そうでなければ、何か別の解法を考えないといけないよね。

アオさん：２点Ｂ、Ｃを通る直線上に、四角形ＡＰ′ＱＰが平行四辺形と
なるような点Ｐ′を考えるとできそうだね。

〔問３〕

下の図３は、図１において、ＦＱ＝ＨＰ＝２ｃｍの場合を表している。
立体Ａ―ＣＰＱの体積は何ｃｍ^{3}か。

図３